

---

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI ANALISI MATEMATICA

P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI

UN CRITERIO DI WIENER PER UNA CLASSE  
DI OPERATORI ELLITTICI DEGENERI

Bologna, 7 MARZO 1985

In questo seminario esporremo alcuni risultati riguardo ad una classe di operatori differenziali ellittici degeneri del 2° ordine, a proposito delle seguenti questioni (L indica un operatore della classe considerata):

- 1) Stima della funzione di Green in termini della distanza d associata all'operatore L
- 2) Caratterizzazione dei punti di frontiera regolari per il problema di Dirichlet relativo all'operatore L, mediante una condizione del tipo di quella di Wiener per il laplaciano.
- 3) Criteri geometrici di regolarità.

Sia  $\Omega_0$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 3$ . Siano, per  $1 \leq i \leq y$ ,  $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j}$  operatori differenziali del 1° ordine a coefficienti  $C^\infty(\Omega_0, \mathbb{R})$ .

Indicate con  $b_i$  ( $1 \leq i \leq y$ ) altre funzioni in  $C^\infty(\Omega_0, \mathbb{R})$ , sia:

$$L = \sum_{i=1}^r X_i^2 + \sum_{i=1}^r b_i(x) X_i$$

Sull'operatore L facciamo le seguenti ipotesi:

- i) L'algebra di Lie generata da  $X_1, \dots, X_r$  ha rango n in ogni punti di  $\Omega_0$ .
- ii) Esistono due funzioni strettamente positive  $\theta, \theta^*$  di classe  $C^2(\Omega_0, \mathbb{R})$  tali che  $L\theta < 0$ ,  $L^*\theta^* < 0$  in  $\Omega_0$ ;  $L^*$  denota l'operatore aggiunto formale di L.

Queste ipotesi garantiscono (cfr. [B]) che ogni aperto  $\omega \subset\subset \Omega_0$  dotato, in ciascun punto di frontiera di una normale esterna non caratte-

ristica per  $L$ , possiede una *funzione di Green*  $g$ , mediante la quale si può rappresentare la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet.

$$\begin{cases} Lu = -\mu & \text{in } \omega & [\mu = \text{misura con supporto } \subseteq \omega] \\ u/\partial\omega = 0 \end{cases}$$

nella forma:

$$u(x) = \int_{\omega} g(x,y) d\mu(y) \quad \forall x \in \omega.$$

La funzione di Green consente inoltre di rappresentare in  $\omega$  le funzioni  $L$ -superarmoniche, ed i potenziali; in particolare: se  $u \in S(\omega) \cap H(\omega-K)$  [ $L$ -superarmonica in  $\omega$ , e armonica in  $\omega-K$ ] con  $K \subset\subset \omega$ , esistono e sono uniche  $h \in H(\omega)$  e  $\mu \in M^+(K)$  (misura non negativa con supporto in  $K$ ) tali che:

$$(1) \quad u(x) = h(x) + \int_{\omega} g(x,y) d\mu(y) \quad \forall x \in \omega$$

Se  $u \in \mathcal{P}(\omega)$  [ $u$  è un  $L$ -potenziale su  $\omega$ ] allora la (1) vale con  $h \equiv 0$  (cfr [N,S]).

Se  $F$  è un compatto  $\subseteq \omega$ , poniamo

$C(F)$  [capacità di  $F$ ]  $\stackrel{\text{def}}{=} \int_F g(x,y) d\mu(x)$

$$= \sup \{ \mu(F)/\mu \in M^+(F), \int_F g(x,y) d\mu(x) \leq 1 \quad \forall x \in \omega \}$$

Si dimostra (cfr [L], [N,S]) che esiste  $\mu_F \in M^+(F)$  tale che  $\mu_F(F) = C(F)$ ;  $\mu_F$  si chiama *misura di equilibrio* di  $F$ , e la funzione

$$V(x) = \int_{\omega} g(x,y) d\mu_F(y) \quad \forall x \in \omega$$

si chiama *potenziale di equilibrio* di  $F$  in  $\omega$ . Risulta  $V(x) = 1$  in  $\text{int } F$ , si ha inoltre che la misura  $\mu_F$  ha il supporto contenuto in  $\partial F$  (quindi  $C(F) = C(\partial F)$ ). Il potenziale di equilibrio di un compatto  $F$  sarà indicato anche con  $\bar{R}_1^F$ .

Diamo ora la definizione della distanza  $d$  associata all'operatore  $L$ . Questa distanza è stata introdotta da Fefferman-Phong [F,P], Nagel-Stein-Wainger [N,S,W] per operatori con coefficienti  $C^\infty$ , da Franchi-Lanconelli [F,L,1] per certi operatori con coefficienti non regolari. Facendo uso della distanza  $d$ , stabiliremo alcuni criteri di regolarità per il problema di Dirichlet relativo all'operatore  $L$ .

Una curva  $\gamma \subseteq \Omega_0$  si dice  $X$ -ammissibile se:

- i)  $\gamma$  è  $C^1$  a tratti
- ii) Ciascuno dei tratti  $C^1$  di  $\gamma$  è una curva integrale di uno dei campi  $\pm X_1, \dots, \pm X_r$ .

Se  $\gamma [0, T] \rightarrow \Omega_0$  è una parametrizzazione di  $\gamma$  soddisfacente i), ii), porremo  $l(\gamma) = T$ .

L'ipotesi sul rango di  $L(X_1, \dots, X_r)$  permette di dimostrare che per ogni  $x, y \in \Omega_0$  esiste una curva  $\gamma$   $X$ -ammissibile che congiunge  $x$  con  $y$ ; si può perciò definire:

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ è } X\text{-ammissibile e congiunge } x \text{ con } y\}.$$

Questa  $d$  è una distanza, essa risulta equivalente a quella definita in [N,S,W] (cfr. [F]). Si può dimostrare inoltre che, se l'operatore  $L$  è ellittico, e  $A$  è la matrice della sua parte principale, allora la distanza  $d$  è equivalente alla distanza riemanniana generata dalla forma bilineare

$$g(x, \xi, \eta) = \langle A^{-1}(x) \xi, \eta \rangle ,$$

in particolare, se  $L = \Delta$  (operatore di Laplace),  $d$  è equivalente alla distanza euclidea.

Nel seguito faremo frequente uso delle seguenti proprietà della distanza  $d$ :

- i) esiste  $c > 0$  tale che  $d(x, y) \geq c \|x - y\|$  per ogni  $x, y \in \Omega_0$
- ii) (proprietà di duplicazione): esiste  $C_1 > 0$  tale che, per ogni  $x \in \Omega_0$ ,  $r > 0$  risulta:

$$\mu(s(x, 2r)) \leq C_1 \mu(s(x, r))$$

( $\mu$  denota la misura di Lebesgue,  $s(x, 2r)$  e  $s(x, r)$  le sfere, nella distanza  $d$ , di centro  $x$  e raggio rispettivamente  $2r$  e  $r$ )

- iii) la topologia generata in  $\Omega_0$  da  $d$  coincide con quella indotta in  $\Omega_0$  dalla topologia euclidea di  $\mathbb{R}^n$ .

Facendo uso della distanza  $d$  è stata stabilita, da Sánchez-Calle [S] e Nagel-Stein-Wainger [N,S,W] una stima esplicita per la funzione di Green per l'operatore  $L$ :

Teorema 1. Sia  $\omega \subseteq \Omega_0$  un aperto dotato di funzione di Green  $g$ , per l'operatore  $L$ . Allora esistono due costanti  $c > 0$  e  $C > 0$  tali che: per ogni  $(x, y)$  di un intorno della diagonale di  $\omega \times \omega$  risulta:

$$(2) \quad c \frac{d^2(x, y)}{\mu(s(x, d(x, y)))} \leq g(x, y) \leq C \frac{d^2(x, y)}{\mu(s(x, d(x, y)))}$$

Più brevemente, esprimeremo la (2) scrivendo:

$$g(x,y) \equiv \frac{d^2(x,y)}{\mu(s(x,d(x,y)))}$$

Osservazione 1. Se  $L = \Delta$  (e allora  $d$  è equivalente alla distanza euclidea), l'espressione  $\frac{d^2(x,y)}{\mu(s(x,d(x,y)))}$  equivale a  $\frac{1}{|x-y|^{n-2}}$ , che corrisponde alla soluzione fondamentale.

Osservazione 2. Per ogni fissato  $y \in \omega$ , risulta  $\lim_{x \rightarrow y} g(x,y) = +\infty$ . Infatti, essendo  $d(x,y) \geq c|x-y|$ , risulta  $s(x,r) \subseteq B(x, \frac{r}{c})$  ( $B =$  boccia euclidea), quindi  $\mu(s(x,r)) \leq \mu(B(x, \frac{r}{c})) \cong r^n$ , e pertanto

$$\frac{d^2(x,y)}{\mu(s(x,d(x,y)))} \geq \text{cost.} \frac{1}{d(x,y)} \text{ da cui segue quanto affermato.}$$

La funzione  $x \rightarrow g(x,y)$  è dunque una funzione superarmonica positiva, che vale  $+\infty$  in  $y$ , dunque l'insieme  $\{y\}$  è *polare* (cfr. [C,C], proposizione 6.2.1).

Osservazione 3. La formula (2) permette di ottenere una stima esplicita per la capacità di una qualunque sfera nella distanza  $d$ , risulta:

$$(3) \quad C(s(x,r)) \equiv \frac{\mu(s(x,r))}{r^2}$$

Infatti, indicati con  $V_s$  e  $\mu_s$  rispettivamente il potenziale e la misura di equilibrio di  $s = s(x,r)$ , e tenendo conto del fatto che  $x$  è punto interno di  $s$ , per la proprietà di  $d$  di generare la stessa topologia della distanza euclidea, si ha:

$$1 = V_S(x) = \int_{\partial S} g(x,y) d\mu_S(y) \approx \int_{\partial S} \frac{r^2}{\mu(s)} d\mu_S(y) = \frac{r^2}{\mu(s)} \mu_S(\partial S) = \frac{r^2}{\mu(s)} C(\delta)$$

da cui segue la (3), della quale faremo uso nel seguito.

Possiamo ora enunciare il criterio di Wiener:

Teorema 2. Sia  $\Omega$  un aperto  $\subseteq \Omega_0$ ; sia  $y \in \partial\Omega$ ; poniamo, per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Omega'_k = \{x \in \Omega' \mid \lambda^{k+1} \leq d(x,y) \leq \lambda^k\},$$

essendo  $\lambda$  un fissato numero reale  $\in ]0,1[$ .

Sia  $V_k$  il potenziale di equilibrio di  $\Omega'_k$ , relativamente a un intorno  $\omega$  di  $y$  dotato di funzione di Green.

Sono equivalenti le affermazioni:

a)  $y$  è  $L$ -regolare per  $L$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} V_k(y) = +\infty$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} C(\Omega'_k)}{\mu(s(y, \lambda^k))} = +\infty$$

L'equivalenza tra b) e c) è una semplice conseguenza delle stime date per la funzione di Green, ci limiteremo pertanto ad indicare la tecnica di dimostrazione di a)  $\Leftrightarrow$  b).

Per l'osservazione 2, l'insieme  $\{y\}$  è polare; la regolarità di  $y$  per  $\Omega$  è dunque caratterizzata dal criterio tipo De la Vallée-Poussin, contenuto in [N,S].

$$(4) \quad y \text{ è irregolare per } \Omega \Leftrightarrow \lim_{U \in \mathcal{U}_y} \hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) = 0$$

( $U_y$  è il filtro degli intorni compatti di  $y$ ).

La dimostrazione di  $a) \Rightarrow b)$  è molto semplice: supponiamo:

$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(y) < +\infty$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $p \in \mathbb{N}$  tale che  $\sum_{k=p}^{\infty} v_k(y) < \varepsilon$ . Se  $U$  è un intorno compatto di  $y$  tale che  $\Omega' \cap U \subseteq \bigcup_{k=p}^{\infty} \Omega'_k$ , allora (cfr. [C,C], prop. 4.22 e teor. 4.2.2), risulta

$$\hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) \leq \hat{R}_1^{\bigcup_{k=p}^{\infty} \Omega'_k}(y) \leq \sum_{k=p}^{\infty} v_k(y) < \varepsilon$$

dunque, in base a (4),  $y$  è irregolare per  $\Omega$ .

Per dimostrare  $b) \Rightarrow a)$ , supponiamo che  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(y) = +\infty$

In tal caso, almeno una delle due serie  $\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}(y)$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+1}(y)$  diverge,

supponiamo sia la prima.

Chiamiamo  $F_{p,q} = \bigcup_{i=p}^q \Omega'_{2i}$ ,  $v_{p,q}$  il potenziale di equilibrio

di  $F_{p,q}$ .

La parte più rilevante della dimostrazione è dedicata a far vedere che:

(5)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Esiste un numero reale } A > 0 \text{ tale che: per ogni } p \in \mathbb{N}, \text{ e} \\ \text{per ogni } q > p, q \text{ sufficientemente grande, risulta:} \\ v_{p,q}(y) > A \end{array} \right.$

Una volta provato (5), basta osservare che: se  $U$  è un intorno compatto di  $y$ , per  $p$  abbastanza grande, e per ogni  $q > p$  risulta  $F_{p,q} \subseteq U$ ; quindi

$$\hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) \geq v_{p,q}(y) > A,$$



non accade quindi che  $\lim_{U \in U_y} \hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) = 0$ , e quindi a causa di (4),  $y$  è regolare.

Per provare (5), consideriamo le funzioni

$$w_{p,q}(z) = \sum_{i=p}^q v_{2i}(z)$$

Sia  $z \in F_{p,q}$ , per un  $k$  tra  $p$  e  $q$ , risulta  $z \in \Omega'_{2k}$ , quindi

$$w_{p,q}(z) \leq 1 + \sum_{\substack{i=p \\ i \neq k}}^q v_{2i}(z)$$

Ora, per  $i \neq k$ , abbiamo:

$$v_{2i}(z) = \int_{\Omega'_{2i}} g(z, \xi) d\mu_{2i}(\xi) =$$

( $\mu_{2i}$  indica la misura di equilibrio di  $\Omega'_{2i}$ )

$$= \int_{\Omega'_{2i}} \frac{g(z, \xi)}{g(y, \xi)} g(y, \xi) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{z \in \Omega'_{2k} \\ \xi \in \Omega'_{2i}}} \frac{g(z, \xi)}{g(y, \xi)} v_{2i}(y)$$

E' proprio per stimare questo estremo superiore, che risulta op-

portuna la decomposizione della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(y)$  in  $\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}(y) + \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+1}(y)$ ,

in questo modo, prendendo  $z \in \Omega'_{2k}$ ,  $\xi \in \Omega'_{2i}$ , con  $i \neq k$ , la coppia  $(z, \xi)$

si mantiene lontana dalla diagonale di  $\omega \times \omega$ .

Sfruttando la stima della funzione di Green data nel teorema 1, si riesce a dimostrare che:

$$\left| \begin{array}{l} \text{esiste una costante } C_0 > 0 \text{ (dipendente solo da } \lambda) \text{ tale che per} \\ \text{ogni } p, q \in \mathbb{N} \text{ (} p < q \text{), e per ogni } z \in F_{p,q}, \text{ risulta} \\ w_{p,q}(z) \leq 1 + C_0 \sum_{i=p}^q v_{2i}(y) = 1 + C_0 w_{p,q}(y) \end{array} \right.$$

Con alcune considerazioni, basate essenzialmente sull'applicazione del principio di minimo, si dimostra poi che:

$$w_{p,q}(z) \leq (2 + C_0 w_{p,q}(y)) v_{p,q}(z) \text{ per ogni } z \in \omega,$$

da cui, per  $z = y$ , si ottiene

$$v_{p,q}(y) \geq \frac{w_{p,q}(y)}{2 + C_0 w_{p,q}(y)}$$

Fissato  $p$ , il 2° membro ha limite  $1/C_0$  per  $q \rightarrow +\infty$  a causa della divergenza di  $\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}(y)$ , perciò, per  $q$  abbastanza grande, risulterà  $v_{p,q}(y) > \frac{1}{2C_0}$ ; e così provata la (5), e con essa il Teorema 2.

Come applicazione dei teoremi 1 e 2 si ottengono alcuni criteri geometrici di regolarità.

Teorema 3. Supponiamo che esista una costante  $c > 0$  tale che: per ogni  $r > 0$ , abbastanza piccolo, risulti:

$$\mu(\Omega' \cap S(y, r)) \geq c \mu(s(y, r)).$$

Allora  $y$  è regolare per  $\Omega$ .

La dimostrazione è basata sul confronto di  $u_r(x) = \frac{\bar{R}_1^{\Omega'} \cap s(y,r)}{(x)}$  con la funzione  $v_r(x) = \int_{\Omega' \cap s(y,r)} g(x,z) \frac{dz}{r^2}$

Sfruttando il Teorema 1, si dimostra che  $v_r(y) \geq \text{cost.}$  (indipendentemente da  $r$ ), si prova poi, applicando il principio di minimo, che  $v_r(x) \leq \text{cost.}$   $u_r(x)$  per ogni  $x$ , complessivamente risulta  $u_r(y) \geq \text{cost.}$ : il Teorema 3 segue ora dalla (4) (criterio tipo De la Vallée-Poussin).

Osservazione. Quando  $L = \Delta$  l'ipotesi del teorema 3 è soddisfatta, per esempio, quando esiste un cono con vertice in  $y$  contenuto in  $\Omega'$  (proprietà di cono).

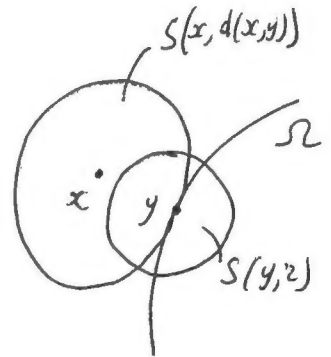
Teorema 4. (proprietà della sfera esterna).

Supponiamo che esista  $x \in \Omega'$ ,

tale che  $s(x, d(x,y)) \subseteq \Omega$ .

Allora  $y$  è regolare per  $\Omega$ .

Questo teorema si dimostra sfruttando certe proprietà geometriche della distanza  $d$  la misura di  $s(x, d(x,y)) \cap s(y,r)$  è equivalente alla misura di  $s(y,r)$ , se  $r$  è abbastanza piccolo ([F,L,2], Proposizione 2.10); pertanto il teorema 4 segue come corollario del teorema 3.



Esempio. Applichiamo il teorema 2 (criterio di Wiener) ad un caso concreto. Sia

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$$

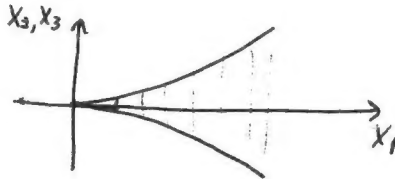
Studiamo la regolarità di  $0 = (0,0,0)$  rispetto a  $L$ , per determinati aperti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ .

1) Sia  $\Omega$  tale che in un intorno di 0,  $\Omega'$  sia descritto da

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq \phi(x_1)\}$$

con  $\phi$  funzione continua e crescente, tale che  $\phi(0) = 0$ . Tenendo presente che, in questo caso,  $s(0, r)$  equivale a un parallelepipedo di semiasse

$r, r^{m+1}, r^{m+1}$ , rispettivamente nelle direzioni di  $x_1, x_2, x_3$ , si dà una espressione esplicita di  $C(\Omega'_k)$  in termini della capacità elettrostatica di un opportuno ellissoide, i cui semiasse hanno lunghezza che tengono conto delle dimensioni di  $\Omega'_k$  e della degenerazione di  $L$ . Tale capacità elettrostatica si calcola esplicitamente (cfr. [K].)



Si ottiene che la serie definita in  $C$ , teorema 2 ha lo stesso carattere di  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{mk} |1g \phi(\lambda^k)|}$ , quindi, per esempio, 0 è regolare per  $\Omega$  se  $C(\xi) \geq Ae^{C\xi^{-2m} |1g \xi}$ .

Osserviamo che, se  $m > 0$ , una "spina" di tipo esponenziale è regolare per  $L$ .

2) Sia ora  $\Omega$  tale che un intorno di 0,  $\Omega'$  sia descritta da  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| \leq x_2; |x_3| \leq x_2^{m+1}\}$ .

Una maggiorazione piuttosto rozza di  $C(\Omega'_k)$  è sufficiente per verificare che la serie e di teorema 2 è convergente: dunque 0 è irregolare per  $\Omega$ .

Quest'ultimo esempio mette in evidenza il fatto che lungo la direzione di  $x_1$ , l'operatore  $L$  ha un comportamento "migliore" rispetto al laplaciano, per quanto concerne la regolarità dei punti viceversa, nella direzione di  $x_2$  (o  $x_3$ ), la situazione rispetto al laplaciano è molto meno favorevole.

BIBLIOGRAFIA

- [B] J.M. BONY: "Principe du maximum, inegalité de Harnack et unicité du problema de Cauchy pour les operateurs elliptiques dégénérés". Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19, 1 (1969), 277-304.
- [CC] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA: "Potential theory on Harmonic Spaces". Springer-Verlag, Berlin 1972.
- [F] B. FRANCHI: "Stime sub-ellittiche e metriche riemanniane singolari". Sem. Univ. Bologna, 1982-'83, parte II.
- [F,L,1] B. FRANCHI, E. LANCONELLI: "Una metrica associata a una classe d'operatori elliptici degenerati". Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, 105-114 (1982).
- [F,L,2] B. FRANCHI, E. LANCONELLI: "Holder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficient. Ann. S.N.S. Pisa.
- [F,P] C. FEFFERMAN, D.M. PHONG: "Subelliptic eigenvalue problems". Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, vol. 2, pp. 590-606, Wadsworth, 1983.
- [K] O.D. KELLOGG: "Foundations of potential theory". Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [L] E. LANCONELLI: "Sul problema di Dirichlet per l'equazione del calore. Ann. Mat. Pura ed Appl. 97 (1973), 83-114.

- [N,S] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI: "Superharmonic functions and regularity, of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operator. B.U.M.I. Anal. Fun. e Appl. Serie VI, vol. III, C, N1 1984.
- [N,S,W,] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER: "Balls and metrics defined by vector fields-basic properties". Acta Math. in press (1984).
- [S] A. SANCHEZ-CALLE: "Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields". Invent. Math. 78, 143-160 (1984).